

Beweis des Rekursionssatzes

1 Rekursionslemma

Voraussetzung:

$X \neq \emptyset$ und $a \in X$ und $N := \{0; 1; 2, \dots\}$

Für alle $n \in N$ ist $V_n : X^n \rightarrow X$ eine Abbildung.

Behauptung:

Für alle $n \in N$ gibt es genau eine Funktion

$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$f(0) = a$ und

$f(k+1) = V_{k+1}(f(0), \dots, f(k))$ für alle $0 \leq k < n$.

Bemerkung:

f hängt von n ab.

1.1 Beweis des Rekursionslemmas

I) Eindeutigkeit

Definition:

$B(n) : \Leftrightarrow$

$f_1: \{0, \dots, n\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$f_1(0) = a$ und

$f_1(k+1) = V_{k+1}(f_1(0), \dots, f_1(k))$ für alle $0 \leq k < n$.

und

$f_2: \{0, \dots, n\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$f_2(0) = a$ und

$f_2(k+1) = V_{k+1}(f_2(0), \dots, f_2(k))$ für alle $0 \leq k < n$.

$\Rightarrow f_1 = f_2$ (d.h. $f_1(i) = f_2(i)$ für alle $i \leq n$)

Zeige (mit Induktion)

Für alle $n \in N$ gilt $B(n)$

Beweis mit vollständiger Induktion.

1) Induktionsvoraussetzung $B(0)$

Annahme:

Es gilt: $f_1(0) = a$ und $f_2(0) = a$

also $f_1(0) = f_2(0)$

2) Induktionsvoraussetzung: $B(i)$ für alle $i \leq n$ (IV)

Zeige $B(n+1)$, zeige also:

 $f_1: \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$f_1(0) = a$ und

$f_1(k+1) = V_{k+1}(f_1(0), \dots, f_1(k))$ für alle $0 \leq k < n+1$

und

$f_2: \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$f_2(0) = a$ und

$f_2(k+1) = V_{k+1}(f_2(0), \dots, f_2(k))$ für alle $0 \leq k < n+1$

$\implies f_1 = f_2$ (d.h: $f_1(i) = f_2(i)$ für alle $i \leq n+1$)

aus:

$f_1(k+1) = V_{k+1}(f_1(0), \dots, f_1(k))$ für alle $0 \leq k < n+1$ (E1) und

$f_2(k+1) = V_{k+1}(f_2(0), \dots, f_2(k))$ für alle $0 \leq k < n+1$ (E2)

folgt:

$f_1(k+1) = V_{k+1}(f_1(0), \dots, f_1(k))$ für alle $0 \leq k < n$ und

$f_2(k+1) = V_{k+1}(f_2(0), \dots, f_2(k))$ für alle $0 \leq k < n$

Aus der (IV) folgt dann:

$f_1(i) = f_2(i)$ für alle $i \leq n$ (B1)

Aus (E1) und (E2) folgt:

$f_1(n+1) = V_{n+1}(f_1(0), \dots, f_1(n))$ und $f_2(n+1) = V_{n+1}(f_2(0), \dots, f_2(n))$

Mit Hilfe von (B1) folgt dann:

$f_1(n+1) = f_2(n+1)$, also: $f_1(i) = f_2(i)$ für alle $i \leq n+1$

II) Existenz:

Definition:

$B(n) : \iff$ Es existiert eine Funktion

$f: \{0, \dots, n\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$f(0) = a$ und

$f(k+1) = V_{k+1}(f(0), \dots, f(k))$ für alle $0 \leq k < n$.

Zeige (mit Induktion)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $B(n)$

1) Induktionsvoraussetzung $B(0)$

$f = \{(0, a)\}$ ist eine Funktion mit der gewünschten Eigenschaft

2) Induktionsvoraussetzung $B(n)$

Zeige $B(n+1)$, zeige also:

Es existiert eine Funktion

$g: \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$ mit

der folgenden Eigenschaft (E):

$g(0) = a$ und

$g(k+1) = V_{k+1}(g(0), \dots, g(k))$ für alle $0 \leq k < n+1$

Laut Induktionsvoraussetzung existiert eine Funktion

$h : \{0, \dots, n\} \rightarrow X$ mit
 $h(0) = a$ und
 $h(k+1) = V_{k+1}(h(0), \dots, h(k))$ für alle $0 \leq k < n$.

Nun definiert man eine Funktion wie folgt:

$g : \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$ mit:
 $g(k) := h(k)$ für $k \leq n$
 $g(n+1) := V_{n+1}(h(0), \dots, h(n))$

Diese hat folgende Eigenschaften:

a)

$g(0) = h(0) = a$, also $g(0) = a$

b)

Fall1: $k < n$

$g(k+1) = h(k+1) = V_{k+1}(h(0), \dots, h(k)) = V_{k+1}(g(0), \dots, g(k))$

also;

$g(k+1) = V_{k+1}(g(0), \dots, g(k))$

Fall2: $k = n$

$g(k+1) = V_{k+1}(h(0), \dots, h(k)) = V_{k+1}(g(0), \dots, g(k))$

also:

$g(k+1) = V_{k+1}(g(0), \dots, g(k))$

Fall1 und Fall2 zusammenfasst gilt:

$g(k+1) = V_{n+1}(g(0), \dots, g(k))$

Also gibt es eine Funktion (nämlich g)

$g : \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$ mit der Eigenschaft (E)

1.2 Satz über Rekursionsabbildung

Voraussetzungen:

$M = \{ \{0; 1; \dots; n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$A =$ Menge aller Abbildungen von M nach X

Behauptung:

$F : \mathbb{N} \rightarrow A$ ist eine Abbildung

mit Vorbereich (Definitionsbereich) von $F(n) := \text{vb}(F)(n) = \{0, \dots, n\}$

und jedes $F(n)$ hat die Eigenschaft (E)

Beweis:

$F := \{ (n, f) \mid n \in \mathbb{N} \wedge f : \{0, \dots, n\} \rightarrow X \text{ mit } f(0) = a \wedge$
 $f(k+1) = V_{k+1}(f(0), \dots, f(k)) \text{ für alle } 0 \leq k < n \}$

Nach dem Rekursionslemma gilt:

$\text{vb}(F) = \{ n \mid \exists f (n, f) \in F \} = \mathbb{N}$ und

$(n, f_1) \in F \wedge (n, f_2) \in F \implies f_1 = f_2$ und

Damit ist f eine Abbildung:

$F : \mathbb{N} \rightarrow A$

1.3 Satz (Eindeutigkeitslemma)

$n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N} \implies F(n)(k) = F(k)(k)$

Beweis:

1) $n=0$ klar

2) sonst:

Es gilt nach dem Rekursionslemma:

$F(n)(k) = V_k(F(n)(0), \dots, F(n)(k-1))$ für $k \leq n$

und

$F(m)(k) = V_k(F(m)(0), \dots, F(m)(k-1))$ für $k \leq m$

Es sei obdA: $m \leq n$

also gilt auch:

$F(n)(k) = V_k(F(n)(0), \dots, F(n)(k-1))$ für $k \leq m$

Da es laut dem Rekursionslemma eine eindeutige Funktion f auf $\{0, \dots, m\}$ gibt mit der Eigenschaft (E) : $f(k) = V_k(f(0), \dots, f(k-1))$ für $k \leq m$

muss gelten:

$f = F(n) = F(m)$ auf $\{0, \dots, m\}$

Da $F(n)$ und $F(m)$ auch die Eigenschaft (E) haben.

also gilt:

$F(n)(k) = F(m)(k)$ für $k \leq m$

wähle $m = k$, dann gilt:

$F(n)(k) = F(k)(k)$

2 Rekursionssatz

Voraussetzung:

$X \neq \emptyset$ und $a \in X$ und $N := \{0; 1; 2, \dots\}$

Für alle $n \in N$ ist $V_n : X^n \rightarrow X$ eine Abbildung.

Behauptung:

Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $f: N \rightarrow X$ mit:

$f(0) = a$ und

$f(n+1) = V_{n+1}(f(0), \dots, f(n))$ für $n \in N$

2.1 Beweis

Definiere:

$$H := \bigcup_{i \in N} F(i)$$

I) Existenz

Unterbehauptung1:

$H : N \rightarrow X$

ist eine Abbildung.

Unterbeweis1:

Es sei $(k, x_1) \in H$ und $(k, x_2) \in H$

Zeige $x_1 = x_2$

Es sei $(k, x_1) \in H$

$$\implies (k, x_1) \in \bigcup_{i \in N} F(i) \implies \exists i_1 (k, x_1) \in F(i_1) \implies \exists i_1 x_1 = F(i_1)(k)$$

Nach dem Eindeutigkeitslemma gilt:

$F(i_1)(k) = F(k)(k)$, also:

$x_1 = F(i_1)(k) = F(k)(k)$, also:

$x_1 = F(k)(k)$

Analog:

Es sei $(k, x_2) \in H$

$$\implies (k, x_2) \in \bigcup_{i \in N} F(i) \implies \exists i_2 (k, x_2) \in F(i_2) \implies \exists i_2 x_2 = F(i_2)(k)$$

Nach dem Eindeutigkeitslemma gilt:

$F(i_2)(k) = F(k)(k)$, also:

$x_2 = F(i_2)(k) = F(k)(k)$, also:

$x_2 = F(k)(k)$

Damit:

$x_2 = F(k)(k) = x_1$, also:

$x_2 = x_1$

Unterbehauptung2: (wird hier nicht gebraucht)

Vorbereich von $H = \text{vb}(H) = N$

Unterbeweis2:

$$\text{vb}(H) = \text{vb}\left(\bigcup_{i \in N} F(i)\right) = \text{vb}\left(\bigcup_{i \in N} \{0, \dots, i\}\right) = N$$

Unterbehauptung3:

$H(n+1) = F(n+1)(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$

Unterbeweis3:

$F(n)(n) = F(n)(n) \implies$

$(n, F(n)(n)) \in F(n) \implies$

$(n, F(n)(n)) \in F(n) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F(i) \implies$

$(n, F(n)(n)) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F(i) \implies$

$(n, F(n)(n)) \in H \implies$

$H(n) = F(n)(n)$

Unterbehauptung4:

$H(n+1) = V_{n+1}(H(0), \dots, H(n))$ für $n \in \mathbb{N}$

Unterbeweis4:

Nach der Unterbehauptung3 folgt:

$H(n+1) = F(n+1)(n+1)$ Nach dem Rekursionslemma folgt:

$F(n+1)(n+1) = V_{n+1}(F(n+1)(0), \dots, F(n+1)(n))$

Aus dem Eindeutigkeitslemma folgt:

$V_{n+1}(F(n+1)(0), \dots, F(n+1)(n)) =$

$V_{n+1}(F(0)(0), \dots, F(n)(n))$

Mit Hilfe der Unterbehauptung3 folgt:

$V_{n+1}(F(0)(0), \dots, F(n)(n)) =$

$V_{n+1}(H(0), \dots, H(n))$

also insgesamt:

$H(n+1) = V_{n+1}(H(0), \dots, H(n))$

II) Eindeutigkeit:

Definition:

$B(n) : \Leftrightarrow$

$f1: N \rightarrow X$ und

$f1(0) = a$

$f1(m+1) = V_{n+1}(f1(0), \dots, f1(m))$ für alle $m \in N$

und

$f2: N \rightarrow X$ und

$f2(0) = a$

$f2(m+1) = V_{n+1}(f2(0), \dots, f2(m))$ für alle $m \in N$

$\Rightarrow f1(n) = f2(n)$

Zeige (mit Induktion)

Für alle $n \in N$ gilt $B(n)$

Beweis mit vollständiger Induktion.

1) Induktionsvoraussetzung $B(0)$

aus $f1(0) = a$ und $f2(0) = a$ folgt:

$f1(0) = f2(0)$

2) Induktionsvoraussetzung: $B(i)$ für alle $i \leq n$

Zeige $B(n+1)$, zeige also:

 $f1: N \rightarrow X$ und

$f1(0) = a$

$f1(m+1) = V_{n+1}(f1(0), \dots, f1(m))$ für alle $m \in N$

und

$f2: N \rightarrow X$ und

$f2(0) = a$

$f2(m+1) = V_{n+1}(f2(0), \dots, f2(m))$ für alle $m \in N$

$\Rightarrow f1(n+1) = f2(n+1)$

Nach Voraussetzung gilt:

$f1(m+1) = V_{n+1}(f1(0), \dots, f1(m))$ für alle $m \in N$ und

$f2(m+1) = V_{n+1}(f2(0), \dots, f2(m))$ für alle $m \in N$

Also folgt mit der Induktionsvoraussetzung:

$\Rightarrow f1(i) = f2(i)$ für alle $i \leq n$

Nach Voraussetzung gilt auch:

$f1(n+1) = V_{n+1}(f1(0), \dots, f1(n)) =$

und

$f2(n+1) = V_{n+1}(f2(0), \dots, f2(n))$

Da aber gilt:

$f1(i) = f2(i)$ für alle $i \leq n$

folgt:

$f1(n+1) = f2(n+1)$

qed